

УДК 664.849:519.876.5

DOI <https://doi.org/10.32838/2663-5941/2020.2-2/19>**Дубініна А.А.**

Харківський державний університет харчування та торгівлі

**Селютіна Г.А.**

Харківський державний університет харчування та торгівлі

**Шербакова Т.В.**

Харківський державний університет харчування та торгівлі

**Хацкевич Ю.М.**

Харківський державний університет харчування та торгівлі

**Селютін В.М.**

Харківський державний університет харчування та торгівлі

## ОПТИМІЗАЦІЯ СКЛАДУ ПАСТИ З РОСЛИННОЇ СИРОВИНИ ШЛЯХОМ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Стаття присвячена проблемі й напрямам розширення асортименту продукції здорового харчування, які на тепер вирішуються шляхом оптимізації рецептурних інгредієнтів, що дає змогу отримати інноваційні харчові композиції із заданим складом споживних властивостей. Для розширення асортименту перероблених харчових продуктів все частіше використовують математичні моделі оптимізації їхнього складу, що дозволяє значно й обґрунтовано підвищити їхню якість. Аналіз умов застосування методів дозволив для розв'язання завдання оптимізації складу пасту з агрусу обрати метод Ньютонів, в якому використовуються другі похідні, що вимагає великих обчислень на кожній ітерації, але оптимальне рішення знаходиться за менше число ітерацій, ніж у градієнтних методах, в яких використовуються перші похідні. З метою розробки математичної моделі оптимізації складу пасту з агрусу здійснено загальну постановку задачі підбору композиції інгредієнтів для одержання паст із заданими органолептичними показниками (кольору, смаку, консистенції). Розроблено шкалу значень органолептичних показників для пасту з агрусу залежно від різного вмісту інгредієнтів. Визначені змінні та їх обмеження відповідно до вимог за органолептичними показниками. Побудовано цільову функцію за всіма критеріями (вмістом клітковини, пектину, мінеральних речовин (натрію, калію, кальцію, магнію, фосфору, заліза) й вітамінів (каротину, В<sub>1</sub>, В<sub>2</sub>, РР, С)) й складено частинні фактичні цілі за кожним критерієм. За допомогою програми мовою програмування Паскаль 7.1. здійснено вибір методу розв'язання задачі нелінійної оптимізації. Шляхом математичного моделювання отримано результати оптимізованого складу пасту з агрусу з урахуванням органолептичних показників, яка максимально задовольняє вимогам за збалансованим складом мікроелементів, вітамінів, клітковини й пектину, й встановлено концентрації рецептурних компонентів оптимізованого складу: агрус – 73,6–86,8%, цукор – 10–20%, продукт, що містить крохмаль, – 2,4–4,0%, кропивний напівфабрикат – 0,8–2,4%.

**Ключові слова:** паста з агрусу, оптимізований склад, математичне й комп'ютерне моделювання.

**Постановка проблеми.** Розвиток плодоовочевої промисловості на основі зростання виробництва сільськогосподарської продукції вимагає систематичного удосконалення організації та технології виробництва, раціонального використання сировини, впровадження нових наукових досягнень. Перспективним напрямом розвитку виробництва харчових продуктів є забезпечення високого рівня їхньої якості. Цінність рослинної їжі полягає в тому, що вона містить всі поживні

й біологічно активні речовини. До таких видів сировини відносяться агрус, який росте в Україні та є дешевою сировиною.

З причини відсутності промислових технологій, агрус практично не використовується в переробній промисловості. Тому проблема створення та впровадження в масове виробництво нових видів продуктів з агрусу актуальна. Сучасні погляди на харчові продукти можуть мати розвиток лише на базі розробки науково-теоретичних

основ створення математичних моделей складу та якості продуктів. З метою розширення асортименту перероблених харчових продуктів все частіше використовують математичні моделі оптимізації їхнього складу, що дозволяє значно й обґрунтовано підвищити їхню якість.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Визначальним чинником, який у вирішальній мірі визначає відповідність харчових систем їхнім очікуваним властивостям, є спосіб обґрунтування їхнього рецептурного складу. До недавнього часу відомі методи проєктування рецептур спиралися на емпіричну основу. У багатьох випадках подібний підхід був виправданий, оскільки дозволяв випускати продукти досить високої харчової цінності [1; 2]. Однак, базуючись лише на інтуїції, практично неможливо створити композиції, в максимальному ступені відповідні потребам організму в енергетичних і пластичних біоматеріалах.

Можливість підвищення харчової та біологічної цінності харчових продуктів і раціонів характеризується безліччю шляхів просування до заданої мети. Загальним методологічним прийомом у цьому випадку є цільове комбінування рецептурних інгредієнтів, яке забезпечує отримання харчових композицій з комплексом бажаних позитивних властивостей [3; 4].

Аналіз сукупності методів оптимізації рецептур дозволяє виділити найважливіші критерії їхньої класифікації. Зокрема, до методів вибору за критерієм напрямку й довжини кроку відносять: методи пошуку, або методи нульового порядку, – це методи, які для визначення напрямку й розміру кроку використовують тільки значення цільової функції; градієнтні методи, або методи першого порядку, – методи, в яких для визначення напрямку й кроку використовують значення перших похідних цільової функції та визначають її градієнт; методи Ньютонів, або методи другого порядку, – методи, в яких для визначення напрямку й кроку використовують значення других похідних цільової функції [5–7].

Чим вищий порядок методів, тим більше обчислень на кожній ітерації, але потрібна менша кількість ітерацій. Виходячи з критерію призначення методу рішення, можна відзначити, що немає методів кращих або гірших, тому що застосування того або іншого методу пошуку оптимального рішення залежить від типу нелінійності [8; 9].

Аналіз умов застосування методів дозволив для вирішення завдання оптимізації складу пасти з агрусу обрати метод Ньютонів, в якому вико-

ристовуються другі похідні, що вимагає великих обчислень на кожній ітерації, але оптимальне рішення знаходиться за менше число ітерацій, ніж у градієнтних методах, в яких використовуються перші похідні [10; 11].

**Постановка завдання.** Метою проведених досліджень є обґрунтування та створення нового продукту з агрусу, який відрізняється високими органолептичними якостями й підвищеним вмістом біологічно активних речовин за допомогою математичного моделювання.

**Виклад основного матеріалу.** Існує набір харчових інгредієнтів, які є основою для упорядкування харчових паст. Необхідно підібрати композицію інгредієнтів для одержання паст із заданими органолептичними показниками (колір, смак, консистенція) (табл. 1), що максимально задовольняє вимогам за збалансованим складом мікроелементів, вітамінів, клітковини й пектину. Вміст в пастах вітамінів і мікроелементів повинен прагнути до норми (табл. 2). Водночас сума мас інгредієнтів повинна відповідати необхідній масі готового продукту, тобто складати 100 грамів для такої задачі.

Таблиця 1

**Необхідні значення органолептичних показників**

Органолептичний показник	Паста з агрусу
Колір	Зелений
Смак	Кисло-солодкий
Запах	Властивий сировині
Консистенція	Пастоподібна

З метою коректної інтерпретації результатів математичної обробки органолептичних показників розроблена шкала їхніх значень для пасти з агрусу в залежності від різного вмісту в них інгредієнтів (табл. 3).

Оскільки в такій задачі для отримання оптимальної суміші змінюваними величинами є маси інгредієнтів, що складають пасту, саме їх ми беремо як змінні моделі.

Паста з агрусу:  $X_1$  – кропива,  $X_2$  – крохмаль,  $X_3$  – цукор,  $X_4$  – агрус.

На область визначення описаних змінних накладаються обмеження відповідно до вимог за органолептичними показниками (табл. 1) відповідно до табл. 3.

- 1)  $0,8 \leq X_1 \leq 2,4$  (колір за вмістом кропиви)
- 2)  $2,4 \leq X_2 \leq 4$  (консистенція за вмістом крохмалю)
- 3)  $10 \leq X_3 \leq 20$  (смак за вмістом цукру)

4)  $73,2 \leq X_4 \leq 86,8$  (смак, колір за вмістом агрусу)

5)  $73,2 \leq (X_1C_1 + X_2C_2 + X_3C_3 + X_4C_4) / 100 \leq 86,8$  (консистенція за вмістом сухих речовин), де  $C_i$  – відсотковий вміст сухих речовин, рівний 100%-вода (табл. 2).

Обмеження в кінцевому вигляді має вигляд:

$$73,2 \leq 92,5X_1 + 80X_2 + 99,86X_3 + 15,1X_4 \leq 86,8$$

$$6) X_1 + X_2 + X_3 + X_4 = 100 \text{ (загальна маса суміші).}$$

Метою задачі є одержання суміші, яка максимально задовольняє вимогам за вмістом мікроелементів і вітамінів (тобто вміст й пастах вітамінів і мікроелементів повинен прагнути до норми – табл. 2) під час вищеписаних обмежень шляхом комбінування маси інгредієнтів. Іншими словами, необхідно мінімізувати різницю між значенням функції при такому опорному плані й ідеальним (нормативним) значенням. Критеріями тут є вміст

Таблиця 2

Вміст харчових речовин в інгредієнтах пасти

Харчові речовини	Інгредієнти					Норма на 1 000 ккал, мг	
	Кропива 100 г	Крохмаль 100 г	Кислота лимонна 100 г	Цукор 100 г	Агрus 100 г		
Вода, %	7,5	20	3	0,14	84,9		
Клітковина, %	18	-	-	-	1,8	3,4	
Пектини, %	-	-	-	-	0,99	5,1	
Мінеральні речовини, мг	Na	362	6	-	1	23	1785
	K	6520	15	-	3	260	1 338,5
	Ca	500	40	-	2	22	321
	Mg	301	-	-	-	9	142,5
	P	1 086	77	-	-	28	446
	Fe	40	-	-	0,3	1,6	5,3
Вітаміни, мг	B <sub>1</sub>	0,68	-	-	-	0,01	0,7
	B <sub>2</sub>	0,77	-	-	-	0,02	0,8
	PP	2	-	-	-	0,25	6
	C	250	-	-	-	35,7	20
	Каротин	75	-	-	-	0,2	1,8
Хлорофіл, мг	2	-	-	-	3,7		
Крохмаль, %		79,6					
Енергетична цінність, ккал / 100 г	274	327	-	374	41,1		

Таблиця 3

Шкала оцінок за органолептичними показниками пасти з агрусу

Органолептичний показник	Інгредієнт, що впливає на значення показника	Вміст інгредієнта в пасті, %	Значення органолептичного показника
Смак	Цукор – X <sub>3</sub>	0...5	Не солодкий
		5...10	Слабо солодкий
		10...20	Кисло-солодкий
		Понад 20	Солодкий
	Агрus – X <sub>4</sub>	73,2...86,8	Кисло-солодкий
Колір	Кропива – X <sub>1</sub>	0...0,5	Сірий
		0,5...0,8	Світло-зелений
		0,8...2,4	Зелений
		Понад 2,4	Дуже зелений
	Агрus – X <sub>4</sub>	73,2...86,8	Зелений
Консистенція	Сухі речовини	25...30	Пастоподібна
	Крохмаль – X <sub>2</sub>	0...1,0	Рідка
		1...2,4	Пюреподібна
		2,4...4,0	Пастоподібна
		Понад 4,0	Дуже густа

у суміші мінеральних речовин і вітамінів, клітковини й пектинів.

Загальна цільова функція по всіх критеріях (мінеральним речовинам і вітамінам) має вигляд:

$$Z_{\text{общее}} = \sum_{i=1}^m (Z^i_{\text{фактич}} - Z^i_{\text{ідеальн}})^2 \quad (1)$$

де  $Z^i_{\text{фактич}}$  – вміст в пасти і-ї мінеральної речовини / вітаміну для такого вектора  $\bar{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  ( $n$  – кількість інгредієнтів в пасти);

$Z^i_{\text{ідеальн}}$  – нормативне значення і-го критерію (табл. 2), перелічене на фактичне (для даного вектора  $\bar{X}$ ) число ккал;

$m$  – число критеріїв (мінеральних речовин і вітамінів).

Різниця фактичного й ідеального значень зведена у квадрат для того, щоб у випадку  $Z_{\text{фактич}} < Z_{\text{ідеальн}}$  не одержати негативне значення цільової функції.

Складемо частинні фактичні цілі за кожним критерієм відповідно до таблиці 2.

Оскільки нормативні значення задані з розрахунку на 1 000 ккал, для упорядкування загальної мети необхідно перерахувати норму з розрахунку на фактичне число ккал.

Для даного вектора  $X$  число ккал для пасти з агрусу дорівнює:

$$0,274x_1 + 0,327x_2 + 0,374x_3 + 0,0411x_4.$$

Позначимо відношення:

$$V_i = (0,274x_1 + 0,327x_2 + 0,374x_3 + 0,0411x_4) / 1000,$$

$$\text{Тоді } Z_{\text{ідеальн}(i)} = V_i \times K_{(i)}, \quad (2)$$

де  $K_{(i)}$  – нормативне значення і-го критерію (норма з табл. 2).

Таким чином, після проведених математичних операцій, відповідно до вищеописаного, загальна цільова функція приймає наступний вигляд:

$$\begin{aligned} Z_{\text{ціль}} = & (0,8 \cdot x_1 + 0,0187 \cdot x_4 - V_1 \cdot 3,4)^2 + (0,0099 \cdot x_4 - V_1 \cdot 5,1)^2 + \\ & (0,362 \cdot x_1 + 0,006 \cdot x_2 + 0,001 \cdot x_3 + 0,0023 \cdot x_4 - V_1 \cdot 1,785)^2 + \\ & (6,5 \cdot x_1 + 0,015 \cdot x_2 + 0,003 \cdot x_3 + 0,0003 \cdot x_4 - V_1 \cdot 1,3385)^2 + \\ & (0,5 \cdot x_1 + 0,0002 \cdot x_2 + 0,002 \cdot x_3 + 0,0022 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,321)^2 + \\ & (0,301 \cdot x_1 + 0,009 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,1425)^2 + \\ & (1,086 \cdot x_1 + 0,077 \cdot x_2 + 0,028 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,446)^2 + \\ & (0,0003 \cdot x_1 + 0,0003 \cdot x_3 + 0,0016 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,0053)^2 + \\ & (0,075 \cdot x_1 + 0,002 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,0018)^2 + \\ & (0,00068 \cdot x_1 + 0,00001 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,0007)^2 + \\ & (0,00077 \cdot x_1 + 0,00002 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,0008)^2 + \\ & (0,002 \cdot x_1 + 0,00025 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,006)^2 + \\ & (0,25 \cdot x_1 + 0,0357 \cdot x_4 - V_1 \cdot 0,020)^2 \end{aligned}$$

де

$$V_1 = (0,274X_1 + 0,327X_2 + 0,374X_3 + 0,0411X_4) / 1000,$$

Отримані результати оптимізованого складу пасти з агрусу за допомогою математичного моделювання наведені в таблиці 5.

У результаті розрахунків за математичною моделлю та проведених експериментальних досліджень установлені концентрації рецептурних компонентів пасти з агрусу оптимізованого складу: агрус – 73,6–86,8%, цукор – 10–20%, продукт, що містить крохмаль – 2,4–4,0%, кропивний напівфабрикат – 0,8–2,4%.

**Висновки.** У результаті аналізу умов застосування методів оптимізації для вирішення завдання розробки нової пасти з агрусу обрано метод Ньютона.

Таблиця 4

Частинні фактичні цілі за визначеними критеріями

Критерій	Паства з агрусу	
Клітковина	$0,18X_1 + 0,018X_4$	
Пектини	$0,0099X_4$	
Натрій	$0,362X_1 + 0,006X_2 + 0,001X_3 + 0,023X_4$	
Калій	$6,52X_1 + 0,015X_2 + 0,03X_3 + 0,26X_4$	
Кальцій	$0,5X_1 + 0,04X_2 + 0,002X_3 + 0,022X_4$	
Магній	$0,301X_1 + 0,009X_4$	
Фосфор	$1,086X_1 + 0,077X_2 + 0,028X_4$	
Залізо	$0,04X_1 + 0,0003X_3 + 0,0016X_4$	
Вітаміни	Каротин	$0,075X_1 + 0,002X_4$
	$B_1$	$0,00068X_1 + 0,00001X_4$
	$B_2$	$0,00077X_1 + 0,00002X_4$
	PP	$0,002X_1 + 0,00025X_4$
	C	$0,25X_1 + 0,0357X_4$
Загальна цільова функція $Z_{\text{фактич}}$		$9,31745x_1 + 0,138x_2 + 0,0063x_3 + 0,40768x_4$

Оптимізований склад пасти з агрусу

	Інгредієнти, г				Сума	
	Кропива	Крохмаль	Цукор	Агрис		
Пасти з агрусу	2,4	4,1446	20	73,4554	99,9999	
Клітковина	0,432	-	-	1,3222	1,7542	
Пектини	-	-	-	0,7272	0,7272	
Мінеральні речовини	Na	8,688	0,2487	0,2	16,8947	26,0314
	K	156,48	0,6217	0,6	190,9840	348,6857
	Ca	12,0	1,6579	0,4	16,1602	30,2180
	Mg	7,224	-	-	6,61098	13,8350
	P	26,064	3,1914	-	20,5675	49,8229
	Fe	0,96	-	0,06	1,1753	2,1953
Вітаміни	Каротин	1,8	-	-	0,1469	1,9469
	B <sub>1</sub>	0,0163	-	-	0,0073	0,02367
	B <sub>2</sub>	0,0185	-	-	0,0147	0,0332
	PP	0,048	-	-	0,1836	0,2316
	C	6,0	-	-	26,2236	32,2236
Енергетична цінність, ккал	6,576	13,5529	74,8	30,1902	125,1191	

Здійснено загальну постановку задачі підбору композиції інгредієнтів для одержання паст із заданими органолептичними показниками (колір, смак, консистенція), побудовано цільову функцію за вмістом клітковини, пектину, мінеральних речовин і вітамінів і складено частинні фактичні цілі за кожним критерієм.

Шляхом математичного моделювання отримано результати оптимізованого складу пасти

з агрусу з урахуванням органолептичних показників, які максимально задовольняють вимогам по збалансованому складу мікроелементів, вітамінів, клітковини й пектину, й встановлено концентрації рецептурних компонентів оптимізованого складу: агрус – 73,6–86,8%, цукор – 10–20%, продукт, що містить крохмаль – 2,4–4,0%, кропивний напівфабрикат – 0,8–2,4%.

#### Список літератури:

1. Тележенко Л.Н. Научные основы сохранения биологически активных веществ в технологиях переработки фруктов и овощей : дисс. ... докт. техн. наук : 05.18.13. Одесса, 2004. 415 с.
2. Maeda Y. Recent Trends in Creation of New Foodstuffs. *Syokukhin-to-Naikhatsu: Up-to-date Food Process*. 1986. Vol. 21, № 7. P. 60–67.
3. Зедгенидзе И.Г. Планирование эксперимента для исследования многокомпонентных систем. Москва : Наука, 1976. 390 с.
4. Rambelison Z.J., Darmon N. and Ferguson E.L. Linear programming can help identify practical solutions to improve the nutritional quality of food aid. *Public Health Nutr.* 2008. № 11. P. 395–404.
5. Курицкий Б.Я. Оптимизация вокруг нас: Как математика помогает принимать решения. Выпуск 135. Изд. 2, доп. Москва : URSS., 2018. 152 с.
6. Briend A., Darmon N., Ferguson E. and Erhardt J.G. Linear programming: a mathematical tool for analyzing and optimizing children's diets during the complementary feeding period. *J Pediatr Gastroenterol Nutr.* 2003. № 36. P. 12–22.
7. Beasley J.E. OR-Notes: linear programming – sensitivity analysis – using Solver. *Brunel University London*. URL: [http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpsens\\_solver.html](http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/or/lpsens_solver.html).
8. Методы исследований и организация экспериментов / под ред. проф. К.П. Власова. Харьков : "Гуманитарный Центр", 2002. 256 с.
9. Валентас К.Дж., Ротштейн Э., Сингх Р.П. Пищевая инженерия : справочник с примерами расчетов / под общ. науч. ред. А.Л. Ишевского ; пер. с англ. Санкт-Петербург : Профессия, 2004. 848 с.
10. Белінська С.М., Орлова Н.С., Краснощок В.Г. Моделювання рецептур багатоконпонентних овочевих напівфабрикатів. *Товари і ринки*. 2008, № 1. С. 84–92.
11. Дзюба Н.А. Композиційне проектування полікомпонентних мусів біопротекторної дії. *Вчені записки ТНУ імені В.І. Вернадського*. 2019. Том 30 (69). Ч. 2. № 5. С. 86–92.

**Dubinina A.A., Seliutina H.A., Shcherbakova T.V., Khatskevych Yu.M., Seliutin V.M. OPTIMIZATION OF PASTA COMPOSITION FROM VEGETABLE RAW BY MATHEMATICAL MODELING**

*The article is devoted to the problem and directions of expansion of the range of healthy food products, which are being solved today by optimization of prescription ingredients, which allows to obtain innovative food compositions with a given composition of consumption properties. Mathematical models of optimizing their composition are increasingly used to expand the range of processed foods, which allows them to significantly and reasonably improve their quality. The analysis of the conditions of application of the methods allowed to solve the problem of optimizing the composition of the paste of a gooseberry to choose the Newton method, which uses second derivatives, which requires large calculations at each iteration, but the optimal solution is for fewer number of iterations than in the gradient methods in which the first derivatives are used. In order to develop a mathematical model for optimizing the composition of gooseberry paste, a general statement of the problem of selecting a composition of ingredients to obtain pastes with specified organoleptic parameters (color, taste, texture) was performed. A scale of organoleptic values for gooseberry paste has been developed depending on the different content of the ingredients. Variables and their limitations according to the requirements for organoleptic parameters are determined. The objective function was constructed according to all criteria (content of fiber, pectin, minerals (sodium, potassium, calcium, magnesium, phosphorus, iron) and vitamins (carotene, B<sub>1</sub>, B<sub>2</sub>, PP, C)) and partial actual goals were compiled according to each criterion. Using the program in Pascal 7.1 programming language. the method of solving the problem of nonlinear optimization is made. The results of the optimized composition of gooseberry paste with the help of organoleptic parameters, which maximally satisfies the requirements for the balanced composition of trace elements, vitamins, fiber and pectin, were obtained by mathematical modeling and the concentrations of the prescription components of the optimized composition were determined: gooseberry – 73,6–86,8%, sugar – 10–20%, the product containing starch – 2,4–4,0%, nettle semi-finished product – 0,8–2,4%.*

**Key words:** *gooseberry paste, optimized composition, mathematical and computer simulation.*